Espaces de Besov et EDP d'évolution

Roulley Emeric

Professeur encadrant : Hmidi Taoufik

Table des matières

Introduction

Le but de ce séminaire a été principalement de me familiariser avec les espaces de Besov qui sont définis via la théorie moderne de Fourier initiée par Littlewood et Paley dans les années 30, puis de voir quelques utilisations dans les EDP d'évolution.

Dans une première partie, on introduit les espaces de Besov (inhomogènes) après une présentation succincte de quelques outils d'analyse harmonique. Puis on présente un résultat de composition dans un espace de Besov particulier démontré par M. Vishik en 1998 ([VI98]). Enfin on s'intéresse à deux types d'EDP d'évolution particulières que sont les équations de transport-diffusion et les équations d'Euler. Dans le premier cas, on présente un résultat de T. Hmidi et S. Keraani de 2008 ([KH08]) donnant la persistance de la régularité $B^0_{p,1}$ pour l'équation de transport-diffusion. Puis, nous voyons une application de ce résultat à la persistance globale en temps de la régularité pour les équations d'Euler en dimension 2 dans les espaces critiques de type Besov (à savoir $B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}$) ; résultat démontré par M. Vishik ([VI98]) pour le cas $p < +\infty$ puis par T.Hmidi et S.Keraani pour le cas $p = +\infty$ ([KH08]).

Je remercie Taoufik Hmidi de m'offrir l'opportunité d'un stage de M2 puis d'une thèse sous sa direction.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. L'entier d représentera la dimension de l'espace sur lequel seront définies nos fonctions.

1 Espaces de Besov inhomogènes

1.1 La théorie de Littlewood-Paley ou l'art du découpage en fréquence

Nous présentons ici le tout début de la théorie de Fourier moderne développée (entre autres) par Littlewood et Paley. Cette théorie consiste à découper en fréquence les fonctions ou distributions auxquelles on s'intéresse en somme de fonctions régulières dont la transformée de Fourier est à support compact dans une boule ou un anneau. Nous verrons les résultats présentés ici comme des outils pour démontrer des estimations.

a) Lemme de Bernstein Le lemme suivant, très utile en pratique, permet d'obtenir des estimations de normes L^p liant une fonction à ses dérivées, pourvu qu'elle ait en fréquence un support contenu dans une boule ou un anneau.

Lemme 1 (Bernstein)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une couronne. Soit $\mathcal{B}$ une boule. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.*
Alors il existe $C_0 > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(p,q) \in [1,+\infty]^2$ avec $q \geqslant p$, pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$Supp(\hat{u}) \subset \lambda\mathcal{B} \Longrightarrow \| D^k u \|_q \leqslant C_0^{k+1} \lambda^{k+d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \| u \|_p$$
$$Supp(\hat{u}) \subset \lambda\mathcal{C} \Longrightarrow C_0^{-k-1}\lambda^k \| u \|_p \leqslant \| D^k u \|_p \leqslant C_0^{k+1}\lambda^k \| u \|_p$$

où

$$\| D^k u \|_p = \sup_{|\alpha|=k} \| \partial^\alpha u \|_p$$

b) Partition dyadique de l'unité Le lemme fondamental de la théorie de Littlewood-Paley est le suivant. Il donne l'existence d'une partition de l'unité dyadique.

Lemme 2. *Il existe $(\chi, \varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^2$ tel que $(\hat{\chi}, \hat{\varphi}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ à support respectivement dans une boule et un anneau et*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \hat{\chi}(\xi) + \sum_{q=0}^{+\infty} \hat{\varphi}(2^{-q}\xi) = 1,$$
$$\forall j \in \mathbb{N}^*, supp(\hat{\varphi}(2^{-j}\cdot)) \cap supp(\hat{\chi}) = \emptyset$$
$$\forall (j,q) \in \mathbb{N}^2, |j-q| \geqslant 2 \Rightarrow supp(\hat{\varphi}(2^{-j}\cdot)) \cap supp(\hat{\varphi}(2^{-q}\cdot)) = \emptyset$$

<u>Idée de preuve :</u> On prend $\hat{\chi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{\chi}(\xi) \in [0,1]$ et $\hat{\chi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |\xi| \geqslant 1 \end{cases}$ puis

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\chi}(\frac{\xi}{2}) - \hat{\chi}(\xi).$$

<u>Notations :</u>
Soit $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable à croissance au plus polynomiale, on note (multiplicateur de Fourier) :

$$f(D)v = \mathcal{F}^{-1}(f\mathcal{F}v) = \mathcal{F}^{-1}f * v.$$

On note alors avec le χ et le φ du lemme précédent :

$$\begin{cases} \forall q \in \mathbb{Z}, q \leqslant -2 \Rightarrow \Delta_q v = 0, \\ \Delta_{-1} v = \hat{\chi}(D)v = \chi * v, \\ \forall q \in \mathbb{N}, \Delta_q v = \hat{\varphi}(2^{-q}D)v = 2^{qd}\varphi(2^q\cdot) * v, \\ S_q = \displaystyle\sum_{j=-1}^{q-1} \Delta_j. \end{cases}$$

Comme $\delta_0 = \mathcal{F}^{-1}1$ est l'élément neutre de la convolution, on a formellement :

$$\boxed{Id = \sum_{q=-1}^{+\infty} \Delta_q}$$

et l'écriture $v = \sum_{q=-1}^{+\infty} \Delta_q v$ est appelée décomposition de Littlewood-Paley de v.

Remarques :

- Les opérateurs Δ_q sont des opérateurs de localisation en fréquence dans une couronne de taille 2^q.
- Pour tout $(j,q) \in (\mathbb{N} \cup \{-1\})^2$, on a : $|j-q| \geqslant 2 \Longrightarrow \Delta_j \Delta_q = 0$ (quasi-orthogonalité).
- Pour tout $q \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, par l'inégalité de Young pour la convolution, l'opérateur Δ_q est linéaire et continu de L^p dans L^p pour tout $p \in [1,+\infty]$, de norme $\| \varphi \|_1$ si $q \in \mathbb{N}$ et $\| \chi \|_1$ si $q=-1$.

Donc $\forall p \in [1,+\infty],\ \Delta_q \in \mathcal{L}_c(L^p)$ uniformément en q.

On énonce un résultat de décomposition de φ démontré par J.-Y. Chemin dans [CHE95].

Proposition 1. *Il existe $(\hat{a}_k)_{1 \leqslant k \leqslant d} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})^d$ tel que*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \hat{\varphi}(\xi) = \sum_{k=1}^{d} i\xi_k \hat{\theta}_k(\xi) \text{ où } \hat{\theta}_k = \hat{a}_k \hat{\varphi}.$$

Si l'on pose pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1,d]\!], \widetilde{\Delta}_{jk} f = \hat{\theta}_k(2^{-j}D)f = 2^{jd}\theta_k(2^j \cdot) * f$$

on en déduit la décomposition suivante :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \boxed{\Delta_j = 2^{-j} \sum_{k=1}^{d} \partial_k \circ \widetilde{\Delta}_{jk}} \ (\star)$$

En effet, pour tout $j \in \mathbb{N}$, tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\begin{aligned}
2^{-j} \sum_{k=1}^{d} \partial_k \circ \widetilde{\Delta}_{jk} f &= 2^{-j} 2^{jd} \sum_{k=1}^{d} \partial_k (\mathcal{F}^{-1}\hat{\theta}_k(2^j \cdot) * f) \\
&= 2^{-j} 2^{jd} \sum_{k=1}^{d} (\partial_k (\mathcal{F}^{-1}\hat{\theta}_k(2^j \cdot))) * f \\
&= 2^{-j} 2^{jd} \sum_{k=1}^{d} 2^j i \mathcal{F}^{-1} \left(\xi_k \hat{\theta}_k(2^j \cdot) \right) * f \\
&= 2^{jd} \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{d} i\xi_k \hat{\theta}_k(2^j \cdot) \right) * f \\
&= 2^{jd} \varphi(2^j \cdot) * f \\
&= \Delta_j f
\end{aligned}$$

1.2 Présentation des espaces de Besov inhomogènes

Définition 1. *Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $(p,r) \in [1,+\infty]^2$. On appelle espace de Besov de paramètres (s,p,r) l'espace*

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) / \| (2^{qs} \| \Delta_q u \|_p)_{q \in \mathbb{Z}} \|_{l^r(\mathbb{Z})} < +\infty \right\}.$$

Pour $u \in B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$, on note :

$$\| u \|_{B^s_{p,r}} = \| (2^{qs} \| \Delta_q u \|_p)_{q \in \mathbb{Z}} \|_{l^r(\mathbb{Z})}.$$

Remarques :

- L'espace $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ est parfois noté plus simplement $B^s_{p,r}$.
- La définition de $B^s_{p,r}$ est indépendante du choix des χ et φ de la décomposition de Littlewood-Paley.
- Par une certaine caractérisation de H^s, on a $B^s_{2,2} = H^s$.
- Pour $s \in]0,1[$, on a $B^s_{\infty,\infty} = \mathcal{C}^{0,s}$ (espace de Hölder de régularité s (voir la définition page suivante)).

Proposition 2. *Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $(p_1,p_2,r_1,r_2) \in [1,+\infty]^4$ tel que $p_1 \leqslant p_2$ et $r_1 \leqslant r_2$. Alors*

$$B^s_{p_1,r_1} \hookrightarrow B^{s-d\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}_{p_2,r_2} \text{ injection continue}$$

Idée de preuve : Inégalité de Bernstein et injection continue de $l^{r_1}(\mathbb{Z})$ dans $l^{r_2}(\mathbb{Z})$.

2 Composition dans les espaces fonctionnels

2.1 Composition par les fonctions lipschitziennes dans les espaces de Hölder

Pour $\rho \in]0,1]$, on note $\mathcal{C}^{0,\rho}$ l'espace de Hölder de paramètre de régularité ρ. On le munit de la norme

$$\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\rho}} = \|\cdot\|_{L^\infty} + [\cdot]_\rho \text{ où } [f]_\rho = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\rho}.$$

Enfin on note $\|\cdot\|_{Lip} = [\cdot]_1$.

Proposition 3. *Soit $\rho \in]0,1]$. Soit $f \in \mathcal{C}^{0,\rho}(\mathbb{R})$ Soit $g \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^d)$ injective.*
Alors $f \circ g \in \mathcal{C}^{0,\rho}(\mathbb{R}^d)$ et on a l'estimation :

$$\| f \circ g \|_{\mathcal{C}^{0,\rho}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \| f \|_{\mathcal{C}^{0,\rho}(\mathbb{R})} \max\left(1, \| g \|_{Lip}^\rho\right).$$

Preuve :
- Clairement, $\| f \circ g \|_{L^\infty} \leqslant \| f \|_{L^\infty}$.
- Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2$ tel que $x \neq y$, alors par injectivité de g, $g(x) \neq g(y)$ et on a :

$$\frac{|f(g(x)) - f(g(y))|}{|x-y|^\rho} = \frac{|f(g(x)) - f(g(y))|}{|g(x)-g(y)|^\rho} \left(\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|}\right)^\rho \leqslant [f]_\rho \| g \|_{Lip}^\rho .$$

Par passage au sup, on en déduit que

$$[f \circ g]_\rho \leqslant [f]_\rho \| g \|_{Lip}^\rho .$$

D'où

$$\| f \circ g \|_{\mathcal{C}^{0,\rho}(\mathbb{R}^d)} = \| f \circ g \|_{L^\infty} + [f \circ g]_\rho \leqslant \| f \|_{\mathcal{C}^{0,\rho}(\mathbb{R})} \max\left(1, \| g \|_{Lip}^\rho\right).$$

2.2 Composition dans $B^0_{\infty,1}$

Pour conclure cette section, nous présentons un résultat démontré par M. Vishik en 1998 dans [VI98]. Il s'agit d'une estimation logarithmique pour la composition par une fonction bi-lipschitzienne préservant la mesure de Lebesgue dans l'espace de Besov $B^0_{\infty,1}$. On a donc un gain vis-à-vis du résultat de composition précédent : estimée logarithmique vs estimée linéaire.

Théorème 1. *Soit $f \in B^0_{\infty,1}$.*
Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un homéomorphisme bi-lipschitzien préservant la mesure de Lebesgue.
Alors $f \circ g^{-1} \in B^0_{\infty,1}$ et on a l'estimation :

$$\| f \circ g^{-1} \|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant C\left(1 + \log(\| g \|_{Lip} \| g^{-1} \|_{Lip})\right) \| f \|_{B^0_{\infty,1}} .$$

Preuve :
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ à choisir correctement plus tard. En utilisant la décomposition de Littlewood Paley pour f, l'inégalité triangulaire et le théorème de Fubini Tonelli on a :

$$\| f \circ g^{-1} \|_{B^0_{\infty,1}} = \sum_{j=-1}^{+\infty} \| \Delta_j (f \circ g^{-1}) \|_\infty$$
$$\leqslant \sum_{m=-1}^{+\infty} \left(\sum_{|j-m|<N} \| \Delta_j((\Delta_m f) \circ g^{-1}) \|_\infty + \sum_{j-m \geqslant N} \| \Delta_j((\Delta_m f) \circ g^{-1}) \|_\infty + \sum_{m-j \geqslant N} \| \Delta_j((\Delta_m f) \circ g^{-1}) \|_\infty \right) \ (\alpha).$$

On va estimer $\| \Delta_j((\Delta_m f) \circ g^{-1}) \|_\infty$ différemment sur chacun des trois morceaux.
- On suppose $|j-m| < N$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

➢ Si $j \in \mathbb{N}$, on a par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\Delta_j((\Delta_m f) \circ g^{-1})(x)| &= 2^{jd} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^j y)(\Delta_m f)(g^{-1}(x-y)) dy \right| \\ &\leqslant 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(2^j y)||(\Delta_m f)(g^{-1}(x-y))| dy \\ &\lesssim \| \Delta_m f \|_\infty \text{ car } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Par passage au sup, il vient :

$$\| \Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1}) \|_\infty \lesssim \| \Delta_m f \|_\infty$$

➢ Si $j=-1$, en procédant de manière analogue on obtient :

$$\| \Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1}) \|_\infty \lesssim \| \Delta_m f \|_\infty \text{ car } \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d).$$

Dans les deux cas, on a :

$$\boxed{|j-m|<N \Longrightarrow \| \Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1}) \|_\infty \lesssim \| \Delta_m f \|_\infty} \ (\beta).$$

• On suppose $|j-m| \geqslant N$.
On remarque tout d'abord qu'au sens des distributions, on a $\| \nabla u \|_\infty = \| u \|_{Lip}$.
Pour majorer, l'idée est d'utiliser la décomposition $(\star)$ pour Δ_j ou pour Δ_m.
➢ Si $j-m \geqslant N$, alors on applique $(\star)$ à Δ_j.
Comme $m \geqslant -1$ et $N \geqslant 1$, il vient $j \in \mathbb{N}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^d$, alors :

$$\begin{aligned}
|\Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1})(x)| &= |2^{-j}\sum_{k=1}^d 2^{dj}\partial_k(\theta_k(2^j\cdot) * ((\Delta_m f)\circ g^{-1}))(x)| \\
&= |2^{-j}\sum_{k=1}^d 2^{dj}\theta_k(2^j\cdot) * \partial_k((\Delta_m f)\circ g^{-1})(x)| \\
&= |2^{-j}\sum_{k=1}^d 2^{dj}\theta_k(2^j\cdot) * (\partial_k(\Delta_m f)\circ g^{-1}\partial_k g^{-1})(x)| \\
&= |2^{-j}\sum_{k=1}^d 2^{dj}\int_{\mathbb{R}^d}\theta_k(2^j(x-y))(\partial_k(\Delta_m f)\circ g^{-1})(y)\partial_k g^{-1}(y)dy| \\
&\leqslant 2^{-j}\sum_{k=1}^d 2^{dj}\int_{\mathbb{R}^d}|\theta_k(2^j(x-y))||(\partial_k(\Delta_m f)\circ g^{-1})(y)||\partial_k g^{-1}(y)|dy \\
&\lesssim 2^{-j} \| \nabla\Delta_m f \|_\infty \| g^{-1} \|_{Lip} \text{ car } \forall k \in [\![1,d]\!], \theta_k \in L^1(\mathbb{R}^d).
\end{aligned}$$

Ainsi, par passage au sup, il vient

$$\| \Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1}) \|_\infty \lesssim 2^{-j} \| \nabla\Delta_m f \|_\infty \| g^{-1} \|_{Lip} .$$

Or par le lemme de Bernstein on a :

$$\| \nabla\Delta_m f \|_\infty \lesssim 2^m \| \Delta_m f \|_\infty .$$

D'où

$$\boxed{j-m \geqslant N \Longrightarrow \| \Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1}) \|_\infty \lesssim 2^{m-j} \| \Delta_m f \|_\infty \| g^{-1} \|_{Lip}} \ (\gamma).$$

➢ Si $m-j \geqslant N$, alors on applique $(\star)$ à Δ_m.
Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
∗ Si $j \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
|\Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1})(x)| &= |2^{jd}\varphi(2^j\cdot) * ((\Delta_m f)\circ g^{-1})(x)| \\
&= |2^{jd}2^{-m}\sum_{k=1}^d \varphi(2^j\cdot) * \partial_k((\widetilde{\Delta}_{mk} f)\circ g^{-1})(x)| \\
&= |2^{jd}2^{-m}\sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^j(x-y))\partial_k((\widetilde{\Delta}_{mk} f)(g^{-1}(y))dy| \\
&= |2^{jd}2^{-m}\sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^j(x-g(u))\partial_k(\widetilde{\Delta}_{mk} f)(u)du| \text{ car } g \text{ préserve la mesure de Lebesgue} \\
&= |2^{jd}2^{-m}\sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d}\partial_k\varphi(2^j(x-g(u)))\widetilde{\Delta}_{mk} f(u)du| \text{ par IPP} \\
&= |2^{jd}2^{j-m}\sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d}(\partial_k\varphi)(2^j(x-g(u)))\partial_k g(u)\widetilde{\Delta}_{mk} f(u)du|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant 2^{jd}2^{j-m}\sum_{k=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d}|(\partial_k\varphi)(2^j(x-g(u)))||\partial_k g(u)||\widetilde{\Delta}_{mk}f(u)|du\\
&\leqslant 2^{j-m}\sum_{k=1}^{d}\parallel\widetilde{\Delta}_{mk}f\parallel_\infty\parallel g\parallel_{Lip}2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d}|(\partial_{y_k}\varphi)(2^j(x-g(u)))|du\\
&= 2^{j-m}\sum_{k=1}^{d}\parallel\widetilde{\Delta}_{mk}f\parallel_\infty\parallel g\parallel_{Lip}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_k\varphi(v)|dv \text{ car } g \text{ préserve la mesure de Lebesgue}\\
&\lesssim 2^{j-m}\parallel g\parallel_{Lip}\sum_{k=1}^{d}\parallel\widetilde{\Delta}_{mk}f\parallel_\infty \text{ car } \varphi\in\mathcal{S} \text{ et } u\mapsto\partial^\alpha u \text{ est continue de } \mathcal{S} \text{ dans lui-même.}
\end{aligned}$$

Par passage au sup, il vient :

$$\parallel\Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1})\parallel_\infty\lesssim 2^{j-m}\parallel g\parallel_{Lip}\sum_{k=1}^{d}\parallel\widetilde{\Delta}_{mk}f\parallel_\infty .$$

$*$ Si $j=-1$, en procédant de manière analogue, on obtient :

$$\parallel\Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1})\parallel_\infty\lesssim 2^{j-m}\parallel g\parallel_{Lip}\sum_{k=1}^{d}\parallel\widetilde{\Delta}_{mk}f\parallel_\infty .$$

Dans les deux cas, on a :

$$\boxed{m-j\geqslant N\Longrightarrow\parallel\Delta_j((\Delta_m f)\circ g^{-1})\parallel_\infty\lesssim 2^{j-m}\parallel g\parallel_{Lip}\sum_{k=1}^{d}\parallel\widetilde{\Delta}_{mk}f\parallel_\infty}\ (\delta)$$

• En combinant (α), (β), (γ) et (δ), il vient :

$$\begin{aligned}
&\parallel f\circ g^{-1}\parallel_{B^0_{\infty,1}}\\
&\lesssim\sum_{m=-1}^{+\infty}\left(\sum_{|j-m|<N}\parallel\Delta_m f\parallel_\infty+\parallel g^{-1}\parallel_{Lip}\parallel\Delta_m f\parallel_\infty\sum_{j-m\geqslant N}2^{m-j}+\parallel g\parallel_{Lip}\sum_{k=1}^{d}\parallel\widetilde{\Delta}_{mk}f\parallel_\infty\sum_{m-j\geqslant N}2^{j-m}\right)\\
&\lesssim\left(N\sum_{m=-1}^{+\infty}\parallel\Delta_m f\parallel_\infty+2^{-N}\parallel g^{-1}\parallel_{Lip}\sum_{m=-1}^{+\infty}\parallel\Delta_m f\parallel_\infty+2^{-N}\parallel g\parallel_{Lip}\sum_{m=-1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{d}\parallel\widetilde{\Delta}_{mk}f\parallel_\infty\right)\\
&\lesssim\left(N+2^{-N}\parallel g^{-1}\parallel_{Lip}+2^{-N}\parallel g\parallel_{Lip}\right)\parallel f\parallel_{B^0_{\infty,1}} .
\end{aligned}$$

En prenant $N=[\log_2(\parallel g\parallel_{Lip}\parallel g^{-1}\parallel_{Lip})]+1\geqslant 1$ car g préserve le volume, on obtient l'estimation souhaitée.

3 EDP d'évolution et espaces de Besov

Nous commençons par donner une méthode générale pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions à une EDP d'évolution (non-linéaire).
$*$ Existence : en 4 étapes.
➢ Si on a de la chance, un théorème de point fixe peut permettre de conclure directement. Sinon on commence par régulariser la donnée initiale (soit par convolution, soit en localisant via les S_q) puis on créé un schéma (suite) de solutions approchées.
➢ On cherche à obtenir une/des estimation(s) uniforme(s) de la (des) norme(s) de nos solutions approchées dans l'espace (les espaces) d'intérêt.
➢ On cherche à prouver la convergence de notre suite de solutions approchées. Globalement deux manières d'y arriver : argument de compacité (extraction de sous-suite) ou argument de complétude (suite de Cauchy). On peut être amené lors de cette étape à changer d'espace fonctionnel de travail.
➢ On conclue en montrant que la limite obtenue est solution du problème.
$*$ Unicité : généralement une méthode énergétique ou une estimation ou un principe du maximum.

3.1 Transport-diffusion

On s'intéresse ici au problème de transport-diffusion, posé de la manière suivante :

$$(TD_\mu)\ \begin{cases}\partial_t a+v\cdot\nabla a-\mu\Delta a=f\\ \operatorname{div}(v)=0\\ a(0,\cdot)=a_0\end{cases}$$

où $a:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ est l'inconnue, $\mu\geqslant 0$, $v:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs de divergence nulle et $a_0:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ sont des données.

Remarque :
La partie $\partial_t a+v\cdot\nabla a$ traduit le transport de a par le champ de vecteur v et la partie $-\mu\Delta a$ traduit la diffusion.

Proposition 4. *On suppose que $v\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^d))$. Soit a une solution de (TD_μ).*
Alors, pour tout $s\in]-1,1[$, pour tout $(p,q)\in[1,+\infty]^2$, il existe $C=C(s,d)>0$ telle que :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \| a(t,\cdot)\|_{B^s_{p,q}}\leqslant Ce^{CV(t)}\left(\| a_0\|_{B^s_{p,q}}+\int_0^t e^{-CV(\tau)}\| f(\tau,\cdot)\|_{B^s_{p,q}}\,d\tau\right)$$

où

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\ V(t)=\|\nabla v\|_{L^1_tL^\infty}.$$

Preuve : Voir [BCD11]

De cette proposition, on en déduit le théorème suivant [KH09] :

Théorème 2. *Soit $p\in[1,+\infty]$. On suppose que $v\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}^d))$ et $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+,B^0_{p,1})$. Soit a une solution de (TD_μ).*
Alors il existe $C=C(d)>0$ telle que :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad \| a(t,\cdot)\|_{B^0_{p,1}}\leqslant C\left(\| a_0\|_{B^0_{p,1}}+\| f\|_{L^1_tB^0_{p,1}}\right)\left(1+\|\nabla v\|_{L^1_tL^\infty}\right).$$

Preuve :
Pour tout $q\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$, on note $\widetilde{a_q}$ l'unique solution (définie globalement) du système linéaire suivant :

$$\begin{cases}\partial_t u+v\cdot\nabla u-\mu\Delta u=\Delta_q f\\ u(0,\cdot)=\Delta_q a_0.\end{cases}$$

Par linéarité et unicité de la solution, il vient : $a=\displaystyle\sum_{q=-1}^{+\infty}\widetilde{a_q}$.
Soit $N\in\mathbb{N}^*$ à choisir correctement plus tard. Alors, par inégalité triangulaire, théorème de Fubini et définition des espaces de Besov, on a pour tout $t\geqslant 0$:

$$\| a(t,\cdot)\|_{B^0_{p,1}}=\sum_{j=1}^{+\infty}\|\Delta_j a(t,\cdot)\|_p\leqslant\sum_{|j-q|\geqslant N}\|\Delta_j\widetilde{a_q}(t,\cdot)\|_p+\sum_{|j-q|<N}\|\Delta_j\widetilde{a_q}(t,\cdot)\|_p.$$

Encore une fois, il s'agit d'estimer chaque morceau correctement.
• Si $|j-q|<N$, alors en utilisant le fait que les opérateurs Δ_j sont continus de L^p dans L^p uniformément en j et l'estimation d'énergie classique pour les normes L^p, on a :

$$\sum_{|j-q|<N}\|\Delta_j\widetilde{a_q}(t,\cdot)\|_p\ \lesssim\ \sum_{|j-q|<N}\|\widetilde{a_q}(t,\cdot)\|_p\ \lesssim\ \sum_{|j-q|<N}\left(\|\widetilde{a_q}(0,\cdot)\|_p+\|\Delta_q f\|_{L^1_tL^p}\right)\lesssim N\left(\| a_0\|_{B^0_{p,1}}+\| f\|_{L^1_tB^0_{p,1}}\right).$$

• En regarde maintenant le cas où $|j-q|\geqslant N$. Soit $\varepsilon\in[0,1[$. Soit $q\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$. D'après la proposition précédente, on dispose de l'estimation suivante :

$$\forall t\geqslant 0,\quad \|\widetilde{a_q}(t,\cdot)\|_{B^{\pm\varepsilon}_{p,\infty}}\leqslant Ce^{CV(t)}\left(\|\Delta_q a_0\|_{B^{\pm\varepsilon}_{p,\infty}}+\|\Delta_q f\|_{L^1_tB^{\pm\varepsilon}_{p,\infty}}\right).$$

Rappelons que $\| u\|_{B^{\pm\varepsilon}_{p,\infty}}=\displaystyle\sup_{j\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}2^{\pm\varepsilon j}\|\Delta_j u\|_p$.
Ainsi, pour tout $t\geqslant 0$ et pour tout $j\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$, on a :

$$\|\Delta_j\widetilde{a_q}(t,\cdot)\|_p\leqslant 2^{\mp\varepsilon j}Ce^{CV(t)}\left(\|\Delta_q a_0\|_{B^{\pm\varepsilon}_{p,\infty}}+\|\Delta_q f\|_{L^1_tB^{\pm\varepsilon}_{p,\infty}}\right).$$

Or en utilisant la quasi orthogonalité de la famille des opérateurs Δ_q et leur continuité de L^p dans L^p uniformément en q, il vient :

$$\|\Delta_q a_0\|_{B^{\pm\varepsilon}_{p,\infty}}=\sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}2^{\pm\varepsilon m}\|\Delta_m\Delta_q a_0\|_p=\sup_{m\in\{q-1,q,q+1\}}2^{\pm\varepsilon m}\|\Delta_m\Delta_q a_0\|_p\ \lesssim 2^{\pm\varepsilon q}\|\Delta_q a_0\|_p.$$

De manière analogue, on obtient :

$$\| \Delta_q f \|_{L^1_t B^{\pm\varepsilon}_{p,\infty}} \lesssim 2^{\pm\varepsilon q} \| \Delta_q f \|_{L^1_t L^p} .$$

Finalement, en synthétisant, on obtient pour tout $t \geqslant 0$:

$$\| \Delta_j \widetilde{a_q}(t,\cdot) \|_p \lesssim 2^{-\varepsilon|j-q|} e^{CV(t)} \Big(\| \Delta_q a_0 \|_p + \| \Delta_q f \|_{L^1_t L^p} \Big) .$$

En appliquant ce résultat avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient pour tout $t \geqslant 0$:

$$\sum_{|j-q|\geqslant N} \| \Delta_j \widetilde{a_q}(t,\cdot) \|_p \lesssim 2^{-\frac{N}{2}} e^{CV(t)} \sum_{q=-1}^{+\infty} \Big(\| \Delta_q a_0 \|_p + \| \Delta_q f \|_{L^1_t L^p} \Big) \lesssim 2^{-\frac{N}{2}} e^{CV(t)} \Big(\| a_0 \|_{B^0_{p,1}} + \| f \|_{L^1_t B^0_{p,1}} \Big) .$$

• Finalement, on obtient pour tout $t \geqslant 0$:

$$\| a(t,\cdot) \|_{B^0_{p,1}} \lesssim \Big(\| a_0 \|_{B^0_{p,1}} + \| f \|_{L^1_t B^0_{p,1}} \Big) \Big(2^{-\frac{N}{2}} e^{CV(t)} + N \Big) .$$

En prenant $N = \Big[\frac{2CV(t)}{\log(2)} + 1 \Big]$, on obtient l'estimation souhaitée.

3.2 Euler

On s'intéresse maintenant aux équations d'Euler pour les fluides homogènes parfaits incompressibles dans le plan ($d = 2$) donné par le problème :

$$(E) \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0 \\ \mathrm{div}(v) = 0 \\ v(0,\cdot) = v_0 \end{cases}$$

où $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est le champs des vitesses du fluide supposé de divergence nulle (incompressibilité), $p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est le champ de pression exercé sur le fluide et $v_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une donnée initiale.

3.2.1 Généralités

On souhaite éliminer la pression, il est donc commode d'introduire la quantité suivante :

Définition 2. *On appelle tourbillon l'application $\omega = rot(v) = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$.*

En appliquant le rotationnel à (E) on obtient :

$$\partial_t \omega + \mathrm{rot}(v \cdot \nabla v) + \underbrace{\mathrm{rot}(\nabla p)}_{=0 \text{ (Schwartz)}} = 0.$$

or

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(v \cdot \nabla v) &= \partial_1 (v \cdot \nabla v^2) - \partial_2 (v \cdot \nabla v^1) \\ &= (\partial_1 v) \cdot \nabla v^2 - (\partial_2 v) \cdot \nabla v^1 + v \cdot \nabla (\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) \\ &= (\partial_1 v) \cdot \nabla v^2 - (\partial_2 v) \cdot \nabla v^1 + v \cdot \nabla \omega. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\partial_1 v) \cdot \nabla v^2 - (\partial_2 v) \cdot \nabla v^1 &= \partial_1 v^1 \partial_1 v^2 + \partial_1 v^2 \partial_2 v^2 - \partial_2 v^1 \partial_1 v^1 - \partial_2 v^2 \partial_2 v^1 \\ &= \partial_1 v^1 (\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) + \partial_2 v^2 (\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) \\ &= (\partial_1 v^1) \omega + (\partial_2 v^2) \omega \\ &= (\mathrm{div}(v)) \omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le système suivant qui se trouve être équivalent au précédent :

$$(\widetilde{E}) \begin{cases} \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0 \\ \mathrm{div}(v) = 0 \\ \omega = \mathrm{rot}(v) \\ \omega(0,\cdot) = \omega_0 \end{cases}$$

On voit alors que le tourbillon est transporté le long des lignes du flot φ associé au champ de vecteurs v :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \omega(t, \varphi(t,x)) = \omega_0(x),$$

et donc que les normes L^p sont conservées :

$$\forall p \in [1,+\infty], \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \| \omega(t,\cdot) \|_p = \| \omega_0 \|_p .$$

De plus on peut exprimer v en fonction de ω. En effet, comme $\mathrm{div}(v) = 0$, i.e. $\partial_1 v^1 = -\partial_2 v^2$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta v^1 & = & \partial_{11} v^1 + \partial_{22} v^1 \\ & = & \partial_1(-\partial_2 v^2) + \partial_{22} v^1 \\ & = & -\partial_2(\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) \\ & = & -\partial_2 \omega \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \Delta v^2 & = & \partial_{11} v^2 + \partial_{22} v^2 \\ & = & \partial_{11} v^2 + \partial_2(-\partial_1 v^1) \\ & = & \partial_1(\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) \\ & = & \partial_1 \omega \end{array}$$

D'où

$$\Delta v = \nabla^\perp \omega \text{ où } \nabla^\perp = \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, sous des hypothèses de décroissance à l'infini et en notant $K(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|)$ la solution fondamentale du laplacien, il vient :

$$v(x) = (K * \nabla^\perp \omega)(x) = (\nabla^\perp K * \omega)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(y) dy \text{ où } z^\perp = \begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

On donne les deux premiers résultats fondamentaux, le premier dû à T. Kato en 1972 dans [KAT72], le second dû à V. Yudovich en 1963 dans [YUD63].

Théorème 3 (Kato)**.** *Soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $s > 2$ (ou $s > \frac{d}{2} + 1$ en dimension supérieure). On suppose $v_0 \in H^s$. Alors (E) admet une unique solution globale $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, H^s)$ (seulement maximale en temps en dimension supérieure avec un critère d'explosion en temps fini (BKM)).*

Théorème 4 (Yudovich)**.** *On suppose que $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty$.*
Alors $(\widetilde{E})$ admet une unique solution (faible) globale.

3.2.2 Existence globale dans les espaces critiques de type Besov

Remarquons que l'on a les injections suivantes : $B^s_{p,r} \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1} \Leftrightarrow (s > 1 + \frac{d}{p}$ ou $(s = 1 + \frac{d}{p}$ et $r = 1))$.
Nous disposons d'un résultat local d'existence dont la preuve suit le schéma présenté au début de cette section (voir [DC04] et [BCD11]).

Théorème 5 (Dongho Chae)**.** *Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $(p,r) \in [1,+\infty]^2$ tels que $B^s_{p,r} \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}$.*
Alors il existe $C = C(s,p,r) > 0$ telle que pour tout $v_0 \in B^s_{p,r}$ avec $\mathrm{div}(v_0) = 0$, il existe $T \geqslant \frac{C}{\|v_0\|_{B^s_{p,r}}}$ tel que (E) admette une solution v définie et continue (en un certain sens) localement en temps sur $[0,T[$ à valeurs dans $B^s_{p,r}$.

Si de plus $\nabla v_0 \in L^a(\mathbb{R}^d)$ pour $a \in]1,+\infty[$ et $\int_0^T \| \nabla v(\tau,\cdot) \|_\infty d\tau < +\infty$, alors la solution continue d'exister après T.

Le cas surcritique est donné par le théorème suivant obtenu par critère d'explosion sur le tourbillon (BKM) :

Théorème 6. *Soit $(p,r) \in [1,+\infty]^2$. Soit $s > 1 + \frac{2}{p}$. Soit $v_0 \in B^s_{p,r}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathrm{div}(v_0) = 0$ et telle qu'il existe $a \in]1,+\infty[$ tel que $\nabla v_0 \in L^a(\mathbb{R}^2)$.*
Alors (E) admet une unique solution globale en temps $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, B^s_{p,r}(\mathbb{R}^2))$ telle que $\nabla v \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^a(\mathbb{R}^2))$.

Le cas critique est donné par le théorème suivant :

Théorème 7. *Soit $p \in [1,+\infty]$. Soit $v_0 \in B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\mathrm{div}(v_0) = 0$ et telle qu'il existe $a \in]1,+\infty[$ tel que $\nabla v_0 \in L^a(\mathbb{R}^2)$.*
Alors (E) admet une unique solution globale $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^2))$ telle que $\nabla v \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^a(\mathbb{R}^2))$.

Preuve :

Comme $B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}$ s'injecte continument dans $B^1_{\infty,1}$, il suffit de prouver le cas $p=+\infty$.
Soit $v_0 \in B^1_{\infty,1}$. L'existence locale est assurée par le théorème 5 et on note $[0,T^*[$ l'intervalle d'existence maximal.

• Par définition du tourbillon et l'inégalité de Bernstein, on a pour tout $t \in [0,T^*[$:

$$\| \omega(t,\cdot) \|_{B^0_{\infty,1}} = \sum_{q\in\mathbb{N}\cup\{-1\}} \| \Delta_q \omega(t,\cdot) \|_\infty = \sum_{q\in\mathbb{N}\cup\{-1\}} \| \Delta_q \left(\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1\right)(t,\cdot) \|_\infty \lesssim \sum_{q\in\mathbb{N}\cup\{-1\}} 2^q \| \Delta_q v(t,\cdot) \|_\infty = \| v(t,\cdot) \|_{B^1_{\infty,1}} .$$

D'où $\forall t \in [0,T^*[,\ \omega(t,\cdot) \in B^0_{\infty,1}$.

• En appliquant le théorème 2 au tourbillon satisfaisant l'équation de transport $(\widetilde{E})$ (cas particulier des équations de transport-diffusion).

$$\forall t \in [0,T^*[,\quad \| \omega(t,\cdot) \|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim \| \omega_0 \|_{B^0_{\infty,1}} \left(1 + \| \nabla v \|_{L^1_t L^\infty}\right).$$

On souhaite donc estimer $\| \nabla v(\tau,\cdot) \|_\infty$ pour $\tau \in [0,t]$.

$$\begin{aligned}
\| \nabla v(\tau,\cdot) \|_\infty &\leqslant \sum_{q=-1}^{+\infty} \| \Delta_q \nabla v(\tau,\cdot) \|_\infty \text{ par inégalité triangulaire} \\
&= \| \Delta_{-1} \nabla v(\tau,\cdot) \|_\infty + \sum_{q=0}^{+\infty} \| \Delta_q \nabla v(\tau,\cdot) \|_\infty
\end{aligned}$$

∗ Soit $q \in \mathbb{N}$. On sait que $\Delta v = \nabla^\perp \omega$. Donc en passant en Fourier, il vient : $\hat{v} = -\frac{i\xi}{|\xi|^2}\hat{\omega}$.
Ainsi, en prenant une fonction $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ valant 1 sur le support de $\hat{\varphi}$ et telle que 0 n'appartienne pas à son support, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Delta_q \nabla v(\tau,\cdot))(\xi) &= \hat{\varphi}(2^{-q}\xi)\xi\hat{v}(\tau,\xi) \\
&= \widetilde{\varphi}(2^{-q}\xi)\hat{\varphi}(2^{-q}\xi)\xi\hat{v}(\tau,\xi) \\
&= \widetilde{\varphi}(2^{-q}\xi)m(\xi)\mathcal{F}(\Delta_q\omega(\tau,\cdot))(\xi) \text{ où } m \text{ est une fonction homogène d'ordre } 0 \\
&= \widetilde{\varphi}(2^{-q}\xi)m(2^{-q}\xi)\mathcal{F}(\Delta_q\omega(\tau,\cdot))(\xi) \\
&= \mathcal{F}(2^{2q}\widetilde{K}(2^q\cdot) * \Delta_q\omega(\tau,\cdot))(\xi) \text{ où } \mathcal{F}(\widetilde{K})(\xi) = \widetilde{\varphi}(\xi)m(\xi).
\end{aligned}$$

On en déduit par injectivité de la transformée de Fourier que $\Delta_q \nabla v(\tau,\cdot) = 2^{2q}\widetilde{K}(2^q\cdot) * \Delta_q\omega(\tau,\cdot)$, puis par l'inégalité de Young pour la convolution, sachant que $\widetilde{K} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \subset L^1(\mathbb{R}^2)$ que :

$$\| \Delta_q \nabla v(\tau,\cdot) \|_\infty \lesssim \| \Delta_q \omega(\tau,\cdot) \|_\infty .$$

∗ D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\| \Delta_{-1}\nabla v(\tau,\cdot) \|_\infty &\lesssim \| \Delta_{-1}\nabla v(\tau,\cdot) \|_a \text{ par l'inégalité de Bernstein} \\
&\lesssim \| \Delta_{-1}\omega(\tau,\cdot) \|_a \text{ car } \omega \mapsto \nabla v \text{ est un opérateur de Calderon-Zygmund} \\
&\lesssim \| \omega(\tau,\cdot) \|_a \text{ par continuité de l'opérateur } \Delta_{-1} \text{ dans } L^a \\
&= \| \omega_0 \|_a \text{ car les normes sont conservées}
\end{aligned}$$

D'où

$$\| \nabla v(\tau,\cdot) \|_{L^\infty} \lesssim \| \omega_0 \|_a + \| \omega(\tau,\cdot) \|_{B^0_{\infty,1}} . \ (\alpha)$$

On en déduit qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $t \in [0,T^*[$,

$$\| \omega(t,\cdot) \|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim \| \omega_0 \|_{B^0_{\infty,1}} \left(1 + Ct \| \omega_0 \|_a + C \| \omega \|_{L^1_t B^0_{\infty,1}}\right).$$

En appliquant le lemme de Gronwall on en déduit que pour tout $t \in [0,T^*[$,

$$\| \omega(t,\cdot) \|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim \| \omega_0 \|_{B^0_{\infty,1}} (1 + Ct \| \omega_0 \|_a) \exp\left(Ct \| \omega_0 \|_{B^0_{\infty,1}}\right). \ (\beta)$$

• On suppose par l'absurde que $T^* < +\infty$. Alors, de (α) et (β) on a

$$\int_0^{T^*} \| \nabla v(\tau,\cdot) \|_\infty \, d\tau < +\infty.$$

On en déduit, par le critère d'explosion du théorème 5, que la solution peut être prolongée au-delà de T^*, ce qui entre en contradiction avec la définition de T^*. D'où $T^* = +\infty$ et la solution est définie globalement.

Références

[BCD11] H. Bahouri, J.-Y. Chemin. et R. Danchin. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Différential Equations*. Springer. 2011.

[BM02] L. Bertozzi et M. Majda. *Vorticity and Incompressible Flow.* Cambridge texts in applies mathematics. 2002.

[CHE95] J.-Y. Chemin. *Fluides parfaits incompressibles.* Société Mathématique de France, **230**. 1995.

[DC04] D. Chae. *Local existence and blow-up criterion for the Euler equation in the Besov spaces.* Asymptotic Analysis, **38**. 2004.

[KAT72] T. Kato. *Nonstationary flows of viscous ideal fluids in* $\mathbb{R}^3$. J. Functional Analysis, **9**. 1972.

[KH09] T. Hmidi et S. Keraani. *Incompressible vicous flows in borderline Besov spaces.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **189**. 2009.

[TRI83] H. Tribel. *Theory of function spaces, tome 1*. Birkhäuser. 1983.

[TRI92] H. Tribel. *Theory of function spaces, tome 2*. Birkhäuser. 1992.

[TRI06] H. Tribel. *Theory of function spaces, tome 3*. Birkhäuser. 2006.

[VI98] M. Vishik. *Hydordynamics in Besov spaces.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **145**. 1998.

[YUD63] V. Yudovich. *Non stationnary flows of an ideal incompressible fluid*. Zh. Vych. Math, **3**. 1963.